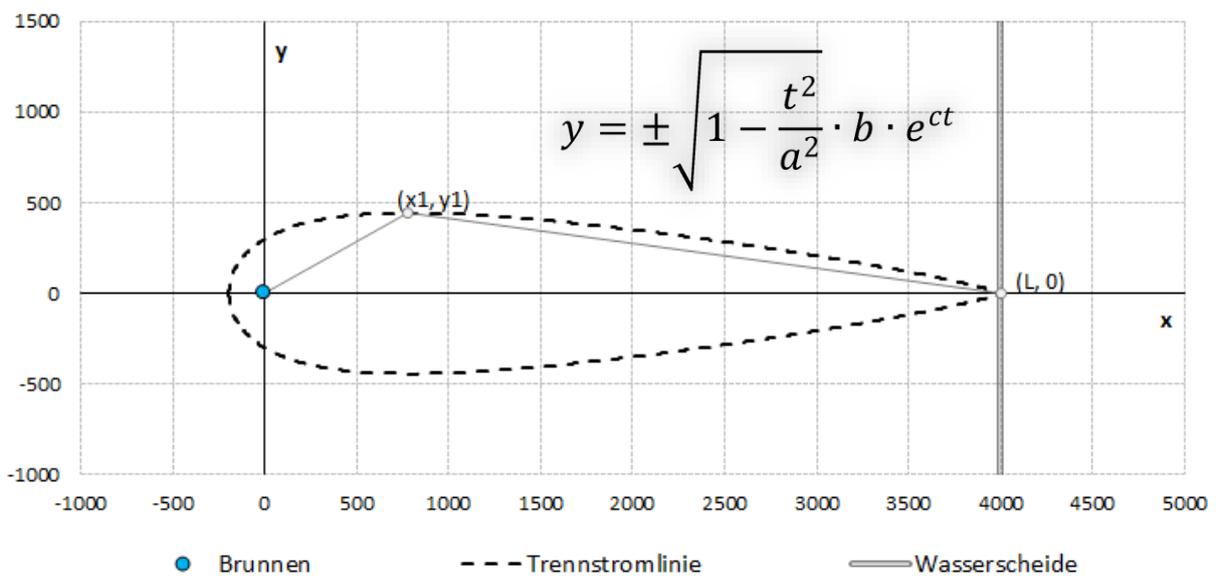




Alternative Approximation der Trennstromlinie zur Ermittlung eines Brunneneinzugsgebietes



Hydro-Geologie-Nord GbR

Dipl.-Ing. Toralf Hilgert

Schwerin, 02.05.2018

Veranlassung

Ein verbreiteter Ansatz zur näherungsweise analytischen Abgrenzung eines Einzugsgebietes eines Einzelbrunnens in paralleler Grundströmung und konstantem Grundwassergefälle ist die Nutzung der Gleichung der Trennstromlinie (KINZELBACH et al. (1996)):

$$0 = \frac{x}{y} \cdot \sin\left(\frac{y \cdot 2\pi \cdot T}{Q}\right) + \cos\left(\frac{y \cdot 2\pi \cdot T}{Q}\right)$$

mit den Kennwerten für die untere Kulmination und der asymptotischen Entnahmebreite:

untere Kulmination:

$$x_k = \frac{Q}{2\pi \cdot T \cdot I_0}$$

asymptotische Entnahmebreite:

$$B_\infty = \frac{Q}{T \cdot I_0}$$

| | |
|----------------|---------------------------------------|
| Q | Entnahmerate [m ³ /s] |
| T | Transmissibilität [m ² /s] |
| I ₀ | natürliches Grundwassergefälle [m/m] |

Dieser Ansatz hat einige Unzulänglichkeiten:

- Da die Grundwasserneubildung nicht berücksichtigt wird, muss zur Einhaltung der Bilanz (Entnahmerate = Grundwasserneubildung x Einzugsgebietsfläche) das Einzugsgebiet mehrfach angepasst werden.
- Die Annahme eines näherungsweise konstanten Grundwassergefälles ist im Allgemeinen nicht gerechtfertigt. Auch bei homogenen hydrogeologischen Verhältnissen muss das Gefälle mit steigender Entfernung von der Wasserscheide – und somit steigendem Abfluss – zunehmen.
- Im Gegensatz zur o.a. Trennstromlinie bilden sich meistens in der Natur ovale, tropfenförmige Brunneneinzugsgebiete aus, die am Hochpunkt einer Grundwasserscheide enden.
- Die Transmissibilität, die maßgeblichen Einfluss auf das Berechnungsergebnis hat, ist in der Regel nur unzureichend bekannt. Bestenfalls liegen Pumpversuche vor, deren Gültigkeit auf den Brunnenbereich begrenzt ist.

Zur Vermeidung dieser Nachteile wird eine alternative Approximation der Trennstromlinie zur Ermittlung eines Brunneneinzugsgebietes abgeleitet.

WIENICKE (2011) hat hierfür einen ersten Ansatz vorgestellt. Dabei wird davon ausgegangen, dass das Grundwasser von einer hydraulischen Hochlage, die durch die Grundwasserneubildung verursacht ist, kreisförmig abströmt. Für diesen Fall kann die ovale Form des Einzugsgebietes (A_U) aus der Grundwasserförderung (Q), der mittleren Grundwasserneubildung (GWN) sowie der Länge (L) vom Brunnen bis zum Hochpunkt der Wasserscheide bilanztreu geschätzt werden.

Der Ansatz von WIENICKE (2011) wird gemäß KINZELBACH et al. (1992) für einen halbseitig unendlichen Grundwasserleiter, der von einem undurchlässigen Rand (Wasserscheide) begrenzt wird, modifiziert. Dadurch wird erreicht, dass das Einzugsgebiet immer auf der hydraulischen Hochlage endet. Ergebnis ist eine Differenzialgleichung der Stromlinie, welche für einen Startpunkt in unmittelbarer Nähe der unteren Kulmination die Trennstromlinie darstellt.

Die Differenzialgleichung lässt sich durch numerische Integration hinreichend genau lösen. Für eine einfache Handhabung soll aber auf die numerische Integration verzichtet werden. Da eine geschlossene Lösung der Differenzialgleichung bisher nicht ermittelt werden konnte, wird eine entsprechende analytische Näherung angegeben.

Herleitung

Die Fläche des unterirdischen Einzugsgebiets eines Brunnens ist abhängig von der Grundwasserförderung (Q) sowie der mittleren Grundwasserneubildung (G) und ergibt sich aus:

$$A_u = \frac{Q}{G}$$

Es wird vereinfacht angenommen, dass das neugebildete Grundwasser vom Hochpunkt einer Wasserscheide nach allen Seiten radial abfließt. Mit der Filtergeschwindigkeit der Grundströmung, dem Abstand R vom Hochpunkt sowie der Mächtigkeit (M) des gespannten Grundwasserleiters und bei Ansatz eines Zylinders gelten folgende Gleichungen:

$$Q = G \cdot \pi \cdot R^2$$

$$Q = 2\pi \cdot R \cdot M \cdot \vec{v}_G$$

Zusammengefasst ergibt sich für die Filtergeschwindigkeit der Grundströmung folgendes:

$$\vec{v}_G = \frac{G \cdot R}{2 \cdot M}$$

Für kartesische Koordinaten mit dem Brunnen im Ursprung und dem Hochpunkt auf der x-Achse im Abstand L gilt für die Grundströmung die Gleichung

$$\vec{v}_G = \frac{G}{2 \cdot M} \begin{pmatrix} L - x \\ y \end{pmatrix}$$

Im Bereich des Brunnens kann ebenfalls die Anströmgeschwindigkeit in Entfernung r mit Hilfe der Zylinderformel abgeleitet werden.

$$\vec{v}_B = \frac{Q}{2\pi \cdot r \cdot M}$$

In kartesischen Koordinaten mit dem Brunnen im Ursprung gilt:

$$\vec{v}_B = \frac{Q}{2\pi \cdot M} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

Wegen der Berücksichtigung der Randbedingung (Wasserscheide) wird ein Spiegelbrunnen notwendig. Für diesen Fall ergibt sich folgender Geschwindigkeitsvektor:

$$\vec{v}_B = \frac{Q}{2\pi \cdot M} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x - 2 \cdot L}{(x - 2 \cdot L)^2 + y^2} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{y}{(x - 2 \cdot L)^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

Das Geschwindigkeitsfeld aus Grundströmung und Anströmung des Brunnens ergibt sich durch Addition der entsprechenden Vektoren:

$$\vec{u} = \vec{v}_G + \vec{v}_B = \frac{G}{2 \cdot M} \begin{pmatrix} L - x \\ y \end{pmatrix} + \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot M} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x - 2 \cdot L}{(x - 2 \cdot L)^2 + y^2} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{y}{(x - 2 \cdot L)^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

Für die Differentialgleichung einer Stromlinie im Geschwindigkeitsfeld der betrachteten Grundwasserströmung im stationären Fall gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u_y}{u_x} = \frac{G \cdot y + \frac{Q}{\pi} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{y}{(x - 2 \cdot L)^2 + y^2} \right)}{G \cdot (L - x) + \frac{Q}{\pi} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{(x - 2 \cdot L)}{(x - 2 \cdot L)^2 + y^2} \right)}$$

Damit ist eine Lösung, auch die der Trennstromlinie, unabhängig von der Mächtigkeit und somit auch von der Transmissibilität des Grundwasserleiters gegeben.

Am unteren Kulminationspunkt ($x = x_k$, $y = 0$) heben sich die brunneninduzierte Strömung und die Grundströmung auf. Dieser Punkt lässt sich wie folgt berechnen:

$$x_k = L - \sqrt{L^2 + \frac{2 \cdot Q}{\pi \cdot G}}$$

Von einem Startpunkt in unmittelbarer Nähe zum unteren Kulminationspunkt kann durch numerische Integration des Geschwindigkeitsfeldes z.B. mit dem RUNG-KUTTA-Verfahren vierter Ordnung, die Trennstromlinie ermittelt werden.

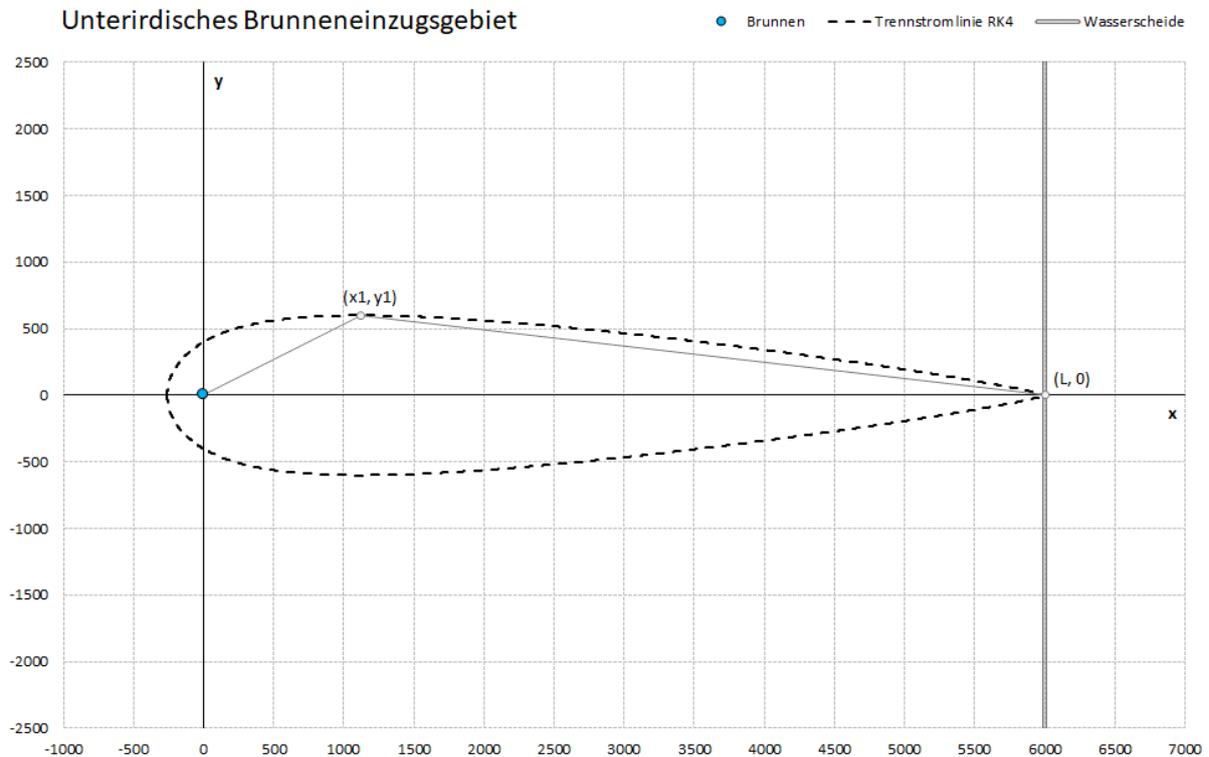


Abbildung 1

Innerhalb der Fläche, welche die Trennstromlinie eingrenzt, wird die vom Brunnen geförderte Grundwassermenge neu gebildet. Damit ist die Wasserbilanz erfüllt.

Für die Differentialgleichung der Stromlinie konnte keine analytische Lösung ermittelt werden. Um für die einfache Handhabung auf die numerische Integration verzichten zu können, wurde folgende Approximation für das tropfenförmige Brunneneinzugsgebiet gefunden und durch umfangreiche numerische Studien parametrisiert.

Abgeleitet aus einer modifizierten Ellipsengleichung wird vermutet, dass folgende Gleichung die Trennstromlinie hinreichend genau beschreibt:

$$y = \pm \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} \cdot b \cdot e^{ct}$$

mit

$$t = x - L + \frac{N}{2}$$

$$a = \frac{N}{2}$$

$$b = \ln(2\pi) \cdot (N - L)$$

$$c = \frac{\pi \cdot \sqrt{A_u}}{L^2} - \frac{2.66}{L}$$

$$N = \sqrt{L^2 + \frac{2A_u}{\pi}}$$

$$A_u = \frac{Q}{G}$$

für

$$L - N \leq x \leq L$$

Die nachfolgende Abbildung zeigt Beispiele von Vergleichen zwischen numerisch bestimmter Trennstromlinien und deren Approximation nach o.a. Gleichung. Den Beispielrechnungen liegen folgende Größen zugrunde:

Entnahmerate $Q = 2.0E-02 \text{ m}^3/\text{s}$

Grundwasserneubildung $G = 4.0E-09 \text{ m/s}$

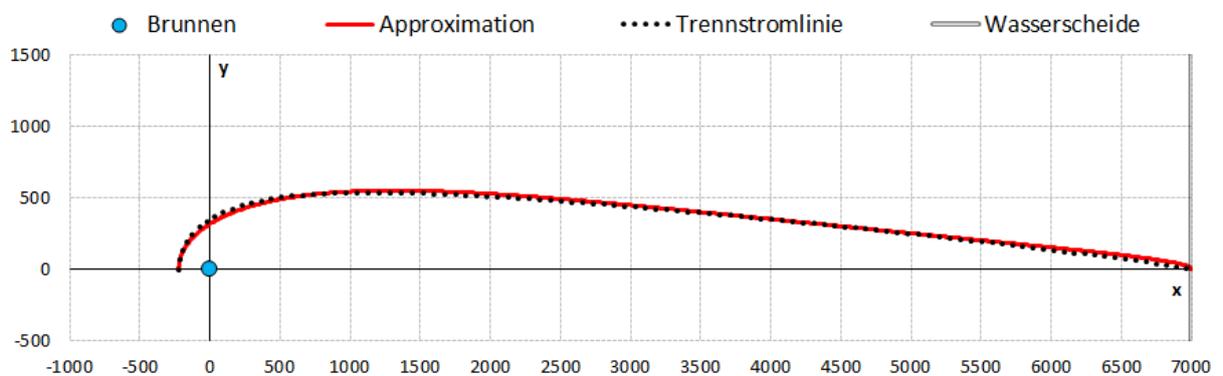
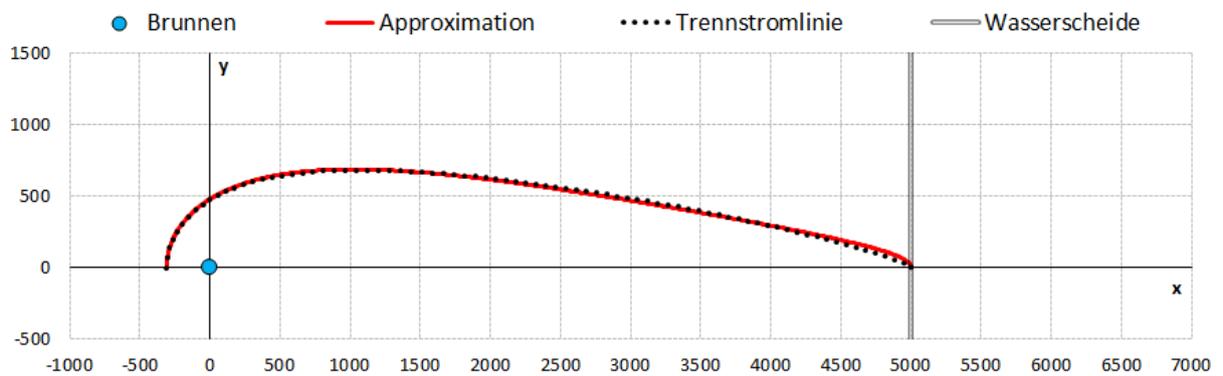
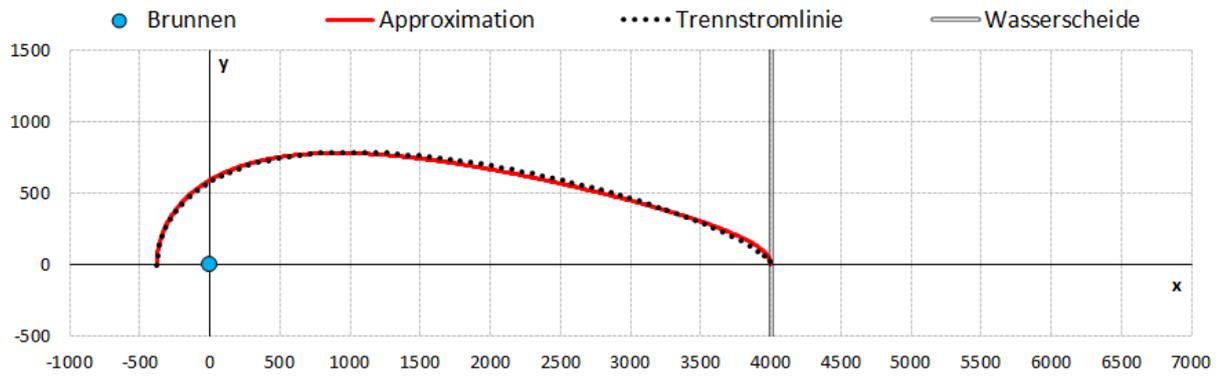
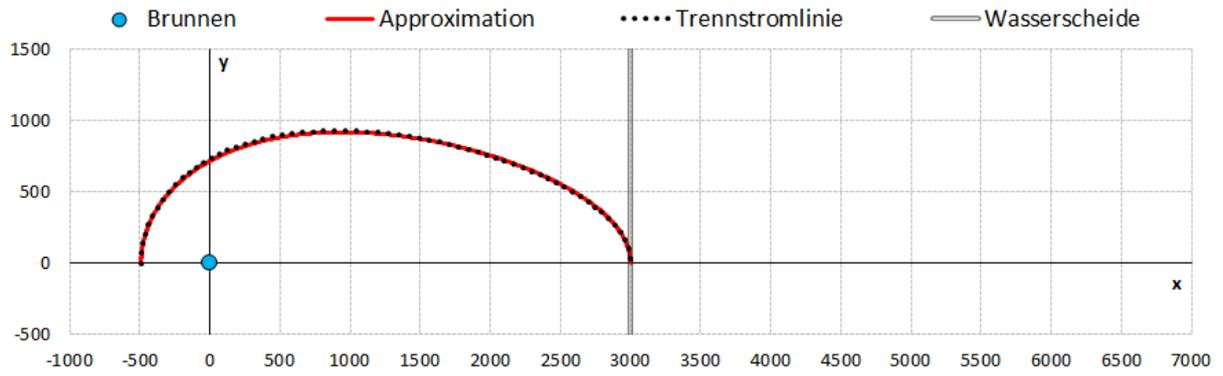


Abbildung 2

Innerhalb praxisrelevanter Grenzen für die Grundwasserneubildung und für die Entnahmerate (s. Anwendungshinweise) ist der Approximationsfehler bezüglich der Bilanztreue kleiner als 5% der Einzugsgebietsgröße.

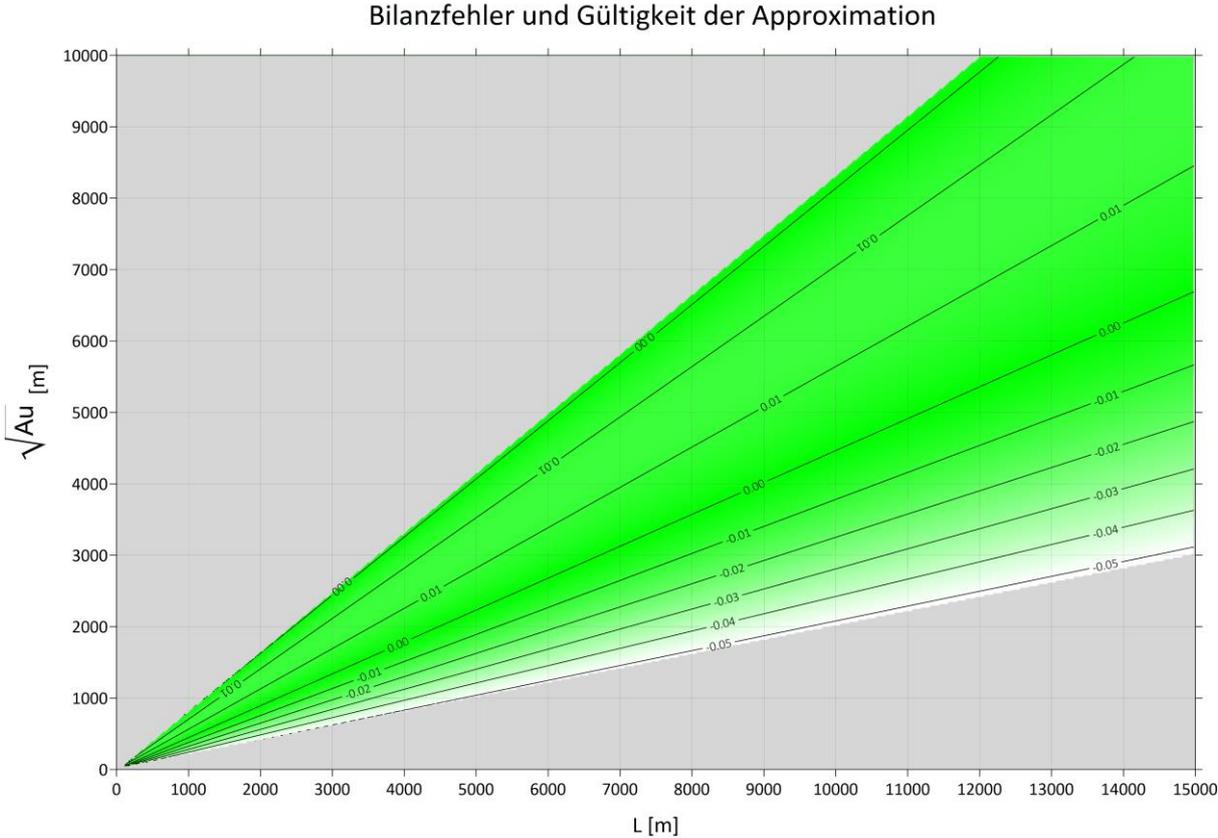


Abbildung 3

Anwendungshinweise

In der Praxis ist als erstes auf Basis eines Hydroisohypsenplanes vom Brunnen eine rückwärts gerichtete Stromlinie bis zum Hochpunkt der Grundwasserscheide zu erzeugen. Ausgehend von der unteren Kulmination werden in regelmäßigen Abständen auf der Stromlinie Konstruktionspunkte aufgetragen. Die zugehörigen y-Werte gemäß der beschriebenen Approximation ergeben, rechtwinklig auf beiden Seiten zur Stromlinie aufgetragen, die Grenzen des unterirdischen Brunneneinzugsgebietes.

Da sich so mitunter bei kleinen Grundwasserförderraten sehr lange und schmale Einzugsgebiete ergeben, wird vorgeschlagen, die Länge der Stromlinie (entspricht der Größe L) zu reduzieren. Empfohlen wird:

$$L \leq 5 \cdot \sqrt{A_u}$$

In Wasserscheidennähe, für

$$L \leq 1.2 \cdot \sqrt{A_u}$$

ist die beschriebene Approximation der Trennstromlinie nicht mehr geeignet (s. Abbildung 4).

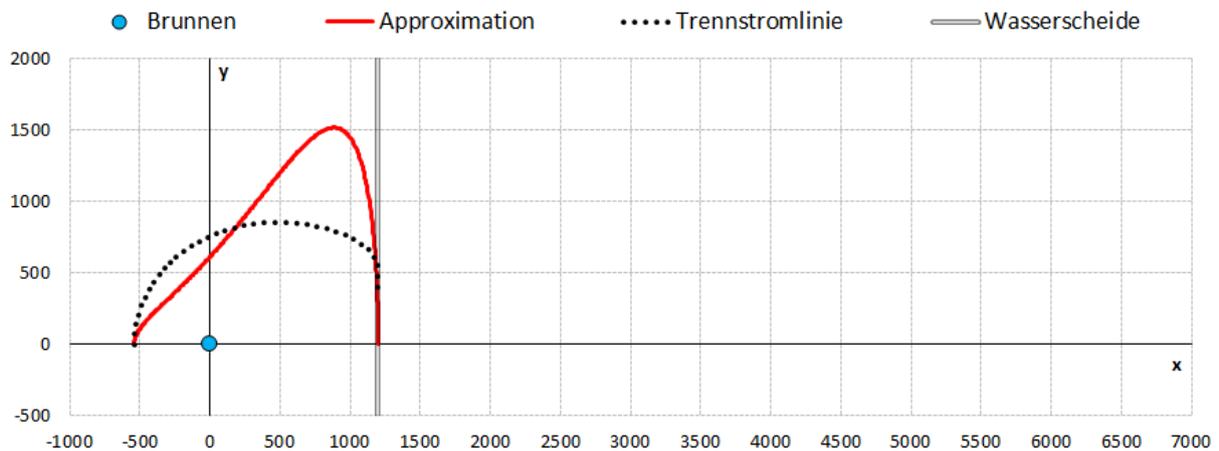


Abbildung 4

Der Verlauf der Einzugsgebietsgrenze muss dort mit numerischen Verfahren ermittelt werden.

Literatur

- [1] BUSCH et al. (1993): Geohydraulik. 3. neubearbeitete Auflage. Gebrüder Borntraeger Verlag, Berlin-Stuttgart
- [2] HÄFNER et al. (1985): Geohydraulische Erkundung von Erdöl-, Erdgas- und Grundwasserlagerstätten. WTI des ZGI, Jahrgang 26/1985, Heft 1, Berlin
- [3] HÖLTING & COLDEWEY (2005): Hydrogeologie. 6. Auflage 2005, Elsevier - Spektrum Akademischer Verlag
- [4] KINZELBACH et al. (1992): Bestimmung von Brunneneinzugsgebieten in zwei und drei räumlichen Dimensionen. Geologisches Jahrbuch, Reihe C, Heft 61, BGR, Hannover
- [5] KINZELBACH et al. (1996): Altlastenhandbuch des Landes Niedersachsen, Berechnungsverfahren und Modelle, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg
- [6] TODD (1980): Groundwater Hydrology. 2. Auflage. 1980, New York (Wiley)
- [7] WIENEKE (2011): Hydrogeologische Gutachten zur Neufestsetzung von Wasserschutzgebieten im Land Brandenburg, Hinweise zur Erstellung. Fachbeiträge des LUGV Heft Nr. 117, LUGV-Brandenburg, Potsdam